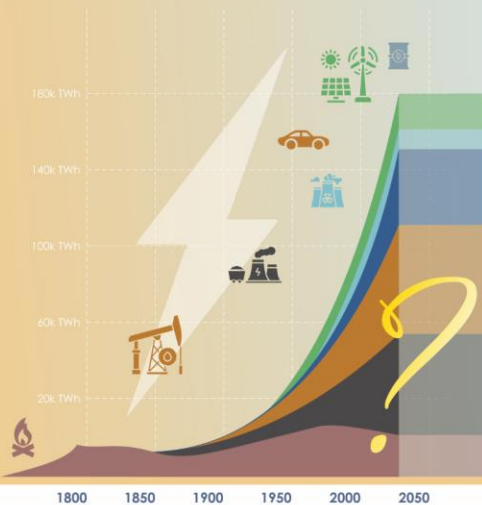




ENERGY
ENERGETIKA
2026



MATEMATIČKI MODELI TERMO- ENERGETSKOG PONAŠANJA ZGRADA/ **MATHEMATICAL MODELS OF BUILDING THERMAL-ENERGY BEHAVIOUR**

prof. dr Miloš Banjac
Sandra Kovačević
Branislav Petrović
prof. dr Mirko Komatina



- Zgrade - jedan od najvećih potrošača energije u savremenim energetske sistemima.
- kompleksni dinamički sistemi čije ponašanje zavisi od velikog broja međusobno povezanih faktora, uključujući klimatske uslove, konstrukciju, tehničke sisteme i način korišćenja.
- U cilju racionalnog projektovanja, optimizacije rada i unapređenja energetske efikasnosti, razvijen je veliki broj modela za simulaciju ponašanja zgrada.

Različiti modeli imaju različite zahteve u pogledu ulaznih podataka, nivoa detaljnosti i računske složenosti, a njihova primenljivost zavisi od konkretne svrhe analize.



Neophodnost sistematičnog sagledavanja postojećeg pristupa modeliranju ponašanja zgrada, njihove mogućnosti i ograničenja.

Cilj rada:



pregled najznačajnijih modela za simulaciju ponašanja zgrada,



klasifikacija prema nivou fizičkog utemeljenja i načina primene,



ukazivanje na njihove tipične oblasti primene u projektovanju, upravljanju i energetske politikama.

- Modeliranje ponašanja zgrada koristi se u različitim fazama životnog ciklusa zgrade, od konceptualnog projektovanja do eksploatacije i upravljanja.
- Osnovne svrhe modeliranja mogu se grupisati u nekoliko kategorija:

FAZA PROJEKTOVANJA

Modeli se koriste za procenu energetske potrebe, dimenzionisanje tehničkih sistema i analizu varijantnih rešenja. U ovoj fazi dominantnu ulogu imaju modeli sa detaljnim fizičkim opisom, koji omogućavaju uporedivost rezultata i usklađenost sa važećim standardima i regulativom.

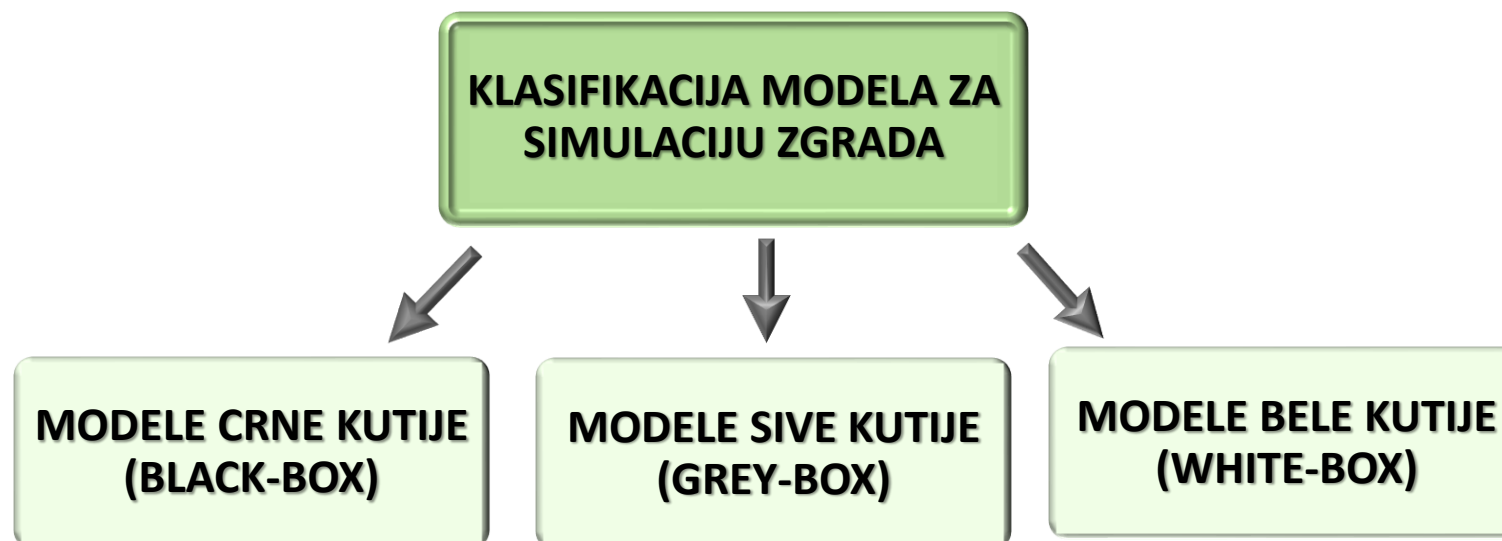
FAZA EKSPLOATACIJE

Razumevanju stvarnog ponašanja zgrade, optimizacija rada sistema grejanja, hlađenja i ventilacije, kao i smanjenje potrošnje energije uz očuvanje komfora. U ovom kontekstu, od posebnog značaja postaju modeli koji se mogu kalibrisati na osnovu merenja i koristiti u realnom vremenu.

U savremenim energetske sistemima, zgrade se sve češće posmatraju kao aktivni elementi koji mogu pružati fleksibilnost, učestvovati u balansiranju mreže i integraciji obnovljivih izvora energije. To dodatno povećava značaj modela koji opisuju dinamički termički odziv zgrade i njenu sposobnost akumulacije toplot

NE POSTOJI JEDINSTVENI MODEL KOJI JE OPTIMALAN ZA SVE PRIMENE

Najčešće prihvaćena podela, prisutna u okviru IEA EBC programa i savremene naučne literature, obuhvata tri osnovne grupe:



MODELI CRNE KUTIJE (BLACK-BOX)

- Modeli crne kutije zasnivaju se na empirijskom opisivanju ponašanja zgrade kroz matematičku ili statističku vezu između ulaznih i izlaznih veličina, bez eksplicitnog fizičkog modeliranja procesa prenosa i akumulacije toplote.
- Opšti oblik ovih modela može se zapisati kao:

$$y(t) = f(u(t), u(t-1), \dots, y(t-1), \dots)$$

gde su:

$y(t)$ - izlazne veličine (unutrašnja temperatura ili potrošnja energije),

$u(t)$ - ulazne veličine (npr. spoljašnja temperatura, solarno zračenje),

$f(t)$ - empirijska funkcija određena na osnovu podataka.

- U ovom pristupu, unutrašnja struktura sistema se ne razmatra, a zgrada se posmatra kao dinamički sistem nepoznate strukture.

MODELI CRNE KUTIJE (BLACK-BOX)

- Parametri modela se određuju isključivo na osnovu mernih podataka primenom statističkih i numeričkih metoda.
- U ovu grupu spadaju linearni regresioni modeli, autoregresivni modeli sa spoljašnjim pobudama (ARX, ARMAX), kao i savremeni pristupi zasnovani na mašinskom učenju, uključujući neuronske mreže i druge algoritme veštačke inteligencije.

PREDNOST MODELA: njihova sposobnost da, uz minimalno poznavanje konstrukcije i tehničkih sistema zgrade, obezbede relativno visoku tačnost predikcije u uslovima sličnim onima u kojima su trenirani. Zbog toga se često koriste za kratkoročno predviđanje potrošnje energije i unutrašnjih temperatura vazduha, kao i za detekciju anomalija u radu sistema.

NEDOSTATAK MODELA: nedostatak fizičke interpretacije kao ključno ograničenje. Ovi modeli ne omogućavaju pouzdanu procenu efekata građevinskih mera energetske efikasnosti, niti su pogodni za ekstrapolaciju ponašanja zgrade u novim režimima rada ili klimatskim uslovima. Zbog toga je njihova primena ograničena u normativnim proračunima i regulatornim okvirima.

MODELI SIVE KUTIJE (GREY-BOX)

- Modeli sive kutije predstavljaju kompromis između empirijskih i fizičkih pristupa modeliranju ponašanja zgrada. Kombinuju pojednostavljeni fizički opis termičkih procesa sa parametrima koji se identifikuju na osnovu mernih podataka iz realne eksploatacije zgrade.
- Osnovu ovih modela čine energetske bilansi formulisani u vidu diferencijalnih jednačina, koje opisuju razmenu toplote između unutrašnjeg vazduha, termičke mase zgrade i spoljašnje sredine.
- **Najčešće se koriste modeli zasnovani na analogiji sa električnim RC kolima**, gde toplotni tokovi odgovaraju protocima električne energije, dok akumulacija toplote odgovara kapacitetima.

Najzastupljeniji:

1R–1C modeli

2R–1C modeli

2R–2C modeli

Složeniji modeli omogućavaju razdvajanje brzog odziva unutrašnjeg vazduha i sporog odziva konstrukcione mase.

Klasifikacija modela za simulaciju ponašanja zgrada

MODELI SIVE KUTIJE (GREY-BOX)

- Matematički modeli sive (i bele) kutije zasnivaju se na zakonu očuvanja energije, odnosno na formulaciji energetske bilansa kao fundamentalne osnove fizičkog modeliranja. U opštem slučaju, energetski bilans kontrolne zapremine zgrade može se izraziti u sledećem obliku:

$$\frac{dU}{dt} = \sum \Phi_{in} - \sum \Phi_{out}$$

U [J] - ukupna termička (unutrašnja) energija zgrade

Φ_{in} Φ_{out} [W] - pozitivni i negativni toplotni protoci

PREDNOST MODELA sive kutije jeste mogućnost fizičke interpretacije uz relativno jednostavniju strukturu. Parametri poput efektivnog toplotnog otpora i toplotnog kapaciteta imaju jasno fizičko značenje i mogu se koristiti za analizu termičke inercije i fleksibilnosti zgrade. Istovremeno, ovi modeli zahtevaju znatno manje ulaznih podataka u poređenju sa detaljnim fizičkim simulacijama.

Klasifikacija modela za simulaciju ponašanja zgrada

MODELI SIVE KUTIJE (GREY-BOX)

1R–1C modeli

- Najjednostavniji model sive kutije ponašanja zgrade, u kom se zgrada posmatra kao termička masa jedinstvenog toplotnog kapaciteta, povezanog sa spoljašnjom sredinom preko efektivnog toplotnog otpora R [K/W].
- Energetski bilans zgrade može se napisati u sledećem obliku:

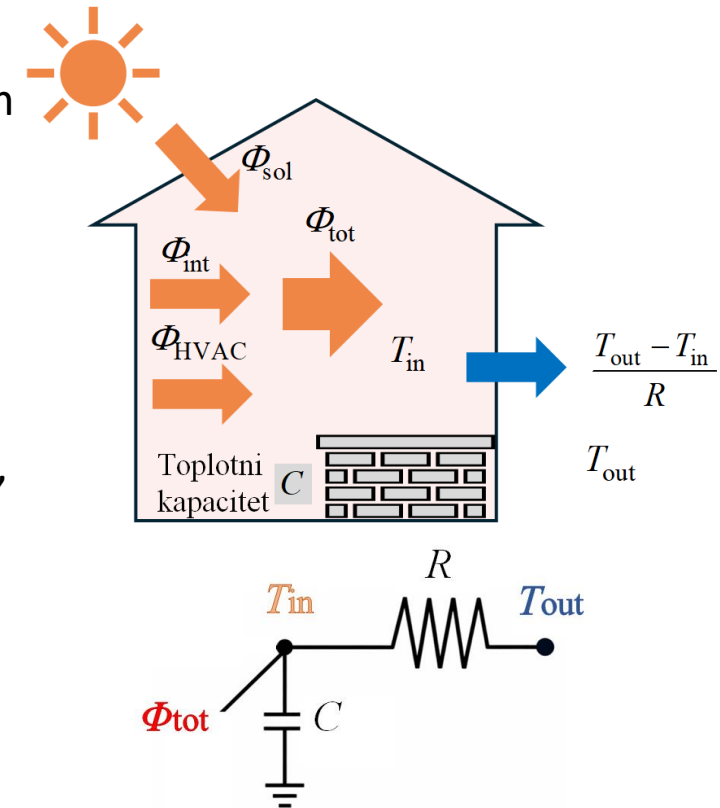
$$C \frac{dT_{in}}{dt} = \frac{T_{out} - T_{in}}{R} + \Phi_{HVAC} + \Phi_{int} + \Phi_{sol}$$

- Ova linearna diferencijalna jednačina, koja predstavlja model prvog reda (1R-1C), može se zapisati i u sledećem obliku:

$$\frac{dT_{in}}{dt} + \frac{1}{CR} T_{in} = \frac{1}{CR} T_{out} + \frac{\Phi_{tot}}{C}$$

Φ_{tot} [W] - zbir svih toplotnih protoka

$$\Phi_{tot} = \Phi_{HVAC} + \Phi_{int} + \Phi_{sol}$$



Slika 1. Šematski prikaz 1R-1C modela zgrade (gore) i odgovarajuća analogija sa električnim kolom (dole)

MODELI SIVE KUTIJE (GREY-BOX)

1R–1C modeli

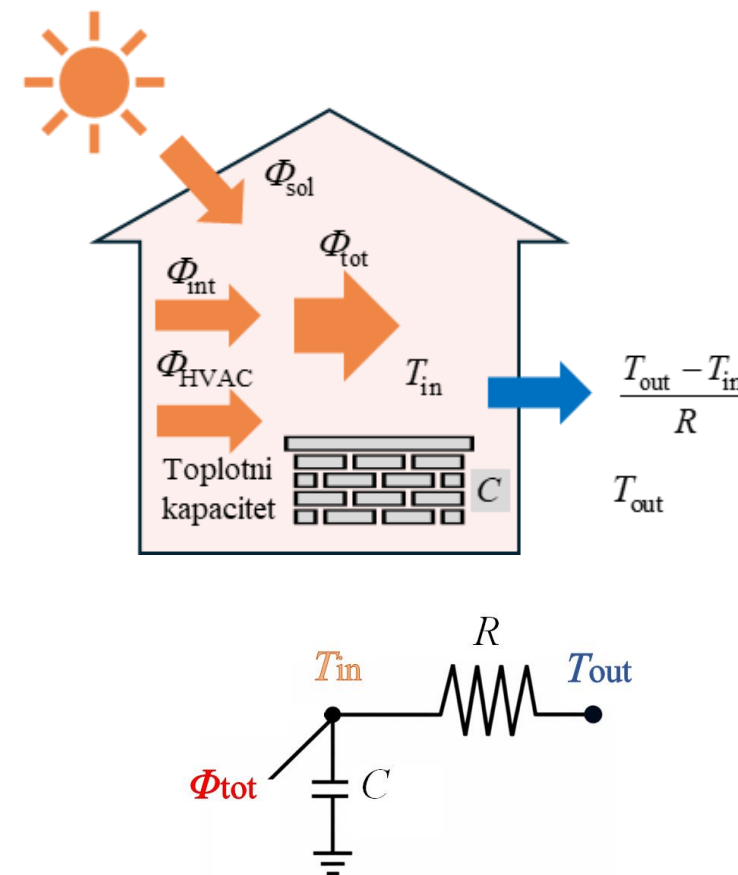
- Linearna diferencijalna jednačina se može svesti na oblik nehomogene diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\dot{T}_{in} + aT_{in} = f(t)$$

gde je sa a [s^{-1}] označena efektivna toplotna difuzivnost zgrade:

$$a = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

- Iako jednostavan, ovaj model omogućava analizu osnovnog dinamičkog ponašanja i procenu vremenske konstante zgrade.



Slika 1. Šematski prikaz 1R-1C modela zgrade (gore) i odgovarajuća analogija sa električnim kolom (dole)

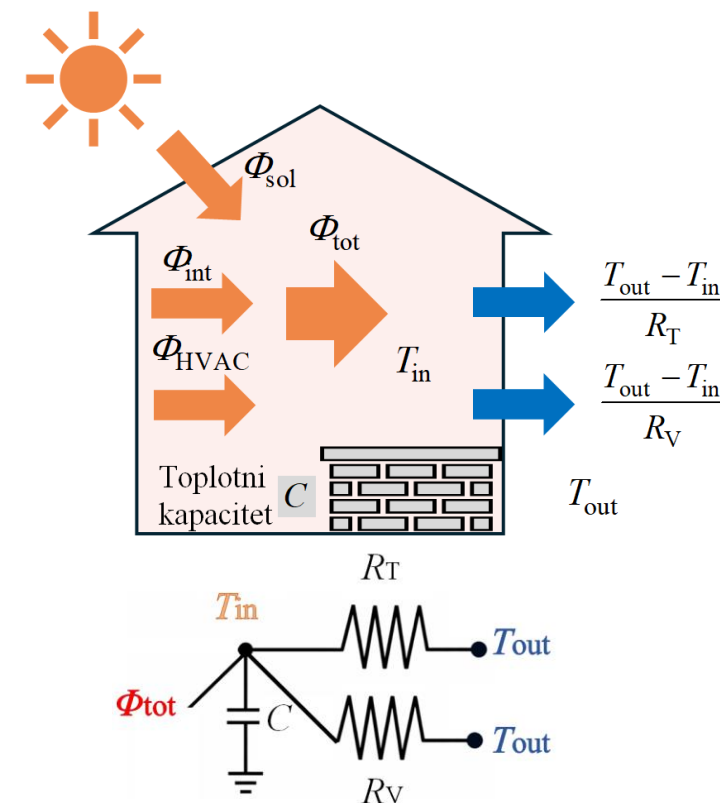
MODELI SIVE KUTIJE (GREY-BOX)

2R–1C modeli

- Model 2R–1C (dva termička otpora i jedan toplotni kapacitet) predstavlja proširenje osnovnog 1R-1C modela u kome se razdvajaju transmisioni gubici toplote kroz termički omotač i ventilacioni/infiltracioni gubici toplote.
- Ventilacioni gubici toplote se mogu izraziti preko otpora ventilacionih gubitaka na sledeći način:

$$\Phi_V = q_m c_p (T_{\text{out}} - T_{\text{in}}) = \frac{T_{\text{out}} - T_{\text{in}}}{R_V}$$

- Za opisivanje ukupne akumulacione mase zgrade i dalje se koristi samo jedan parametar - C efektivni toplotni kapacitet - koji obuhvata toplotne kapacitete zidova, podova, nameštaja i unutrašnjeg vazduha.



Slika 2. Šematski prikaz 2R-1C modela zgrade (gore) i odgovarajuća analogija sa električnim kolima (dole)

Klasifikacija modela za simulaciju ponašanja zgrada

MODELI SIVE KUTIJE (GREY-BOX)

2R–1C modeli

- Energetski bilans zgrade:

$$C \frac{dT_{in}}{dt} = \frac{T_{out} - T_{in}}{R_T} + \frac{T_{out} - T_{in}}{R_V} + \Phi_{HVAC} + \Phi_{int} + \Phi_{sol}$$

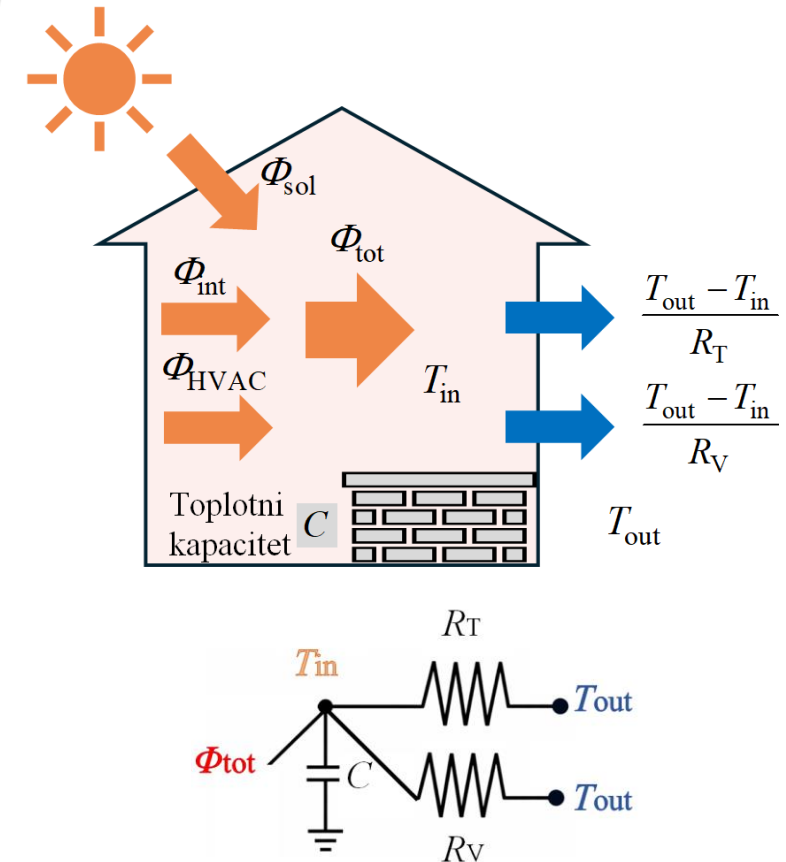
- Dodatno, uvođenjem tzv. ekvivalentnog paralelnog otpora:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_V}$$

- energetski bilans zgrade može se zapisati u obliku:

$$C \frac{dT_{in}}{dt} = \frac{T_{out} - T_{in}}{R_{eq}} + \Phi_{HVAC} + \Phi_{int} + \Phi_{sol}$$

u smislu matematičkog rešavanja 2R–1C model ekvivalentan 1R–1C modelu.



Slika 2. Šematski prikaz 2R-1C modela zgrade (gore) i odgovarajuća analogija sa električnim kolima (dole)

Klasifikacija modela za simulaciju ponašanja zgrada

MODELI SIVE KUTIJE (GREY-BOX)

2R–2C modeli

- Model 2R–2C razdvaja termičku masu elemenata građevinskog omotača od termičke mase unutrašnjeg vazduha i omogućava opis dve vremenske konstante sistema
- Definišu se dve bilansne jednačine, odnosno rešavaju dve diferencijalne jednačine:

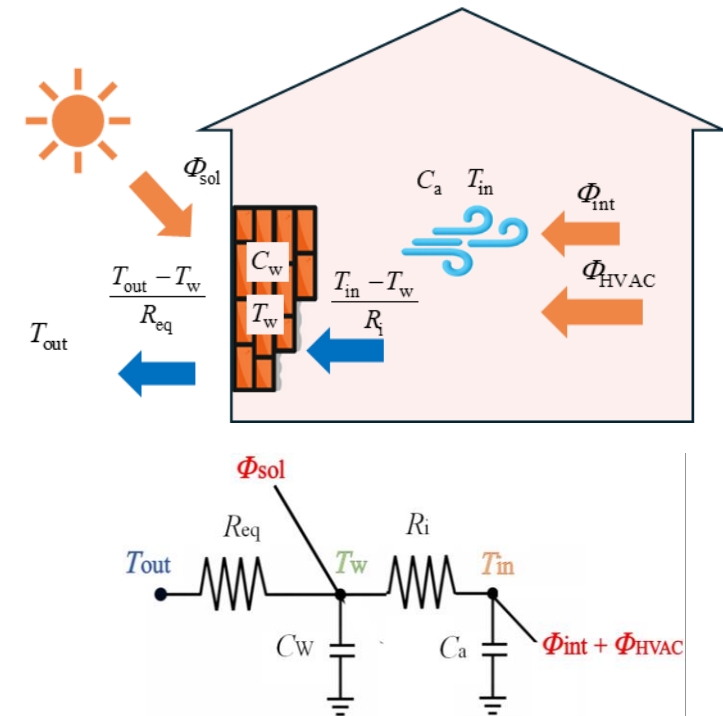
Bilans za unutrašnji vazduh:

$$C_a \frac{dT_{in}}{dt} = \frac{T_w - T_{in}}{R_i} + \Phi_{HVAC} + \Phi_{int}$$

Bilans za termičku masu zida:

$$C_w \frac{dT_w}{dt} = \frac{T_{out} - T_w}{R_{eq}} + \frac{T_{in} - T_w}{R_i} + \Phi_{sol}$$

- Uvodi se toplotni kapacitet elementa građevinskog omotača i toplotni kapacitet unutrašnjeg vazduha zgrade (zidovi, fasada), i
- Formiranim modelom određuje se:
 - temperaturu elemenata građevinskog omotača zgrade, i
 - temperaturu unutrašnjeg vazduha.



Slika 3. Šematski prikaz 2R-2C modela zgrade (gore) i odgovarajuća analogija sa električnim kolima (dole)

Klasifikacija modela za simulaciju ponašanja zgrada

MODELI SIVE KUTIJE (GREY-BOX)

3R–2C modeli

- Definišu se dve bilansne jednačine, odnosno rešavaju dve diferencijalne jednačine:

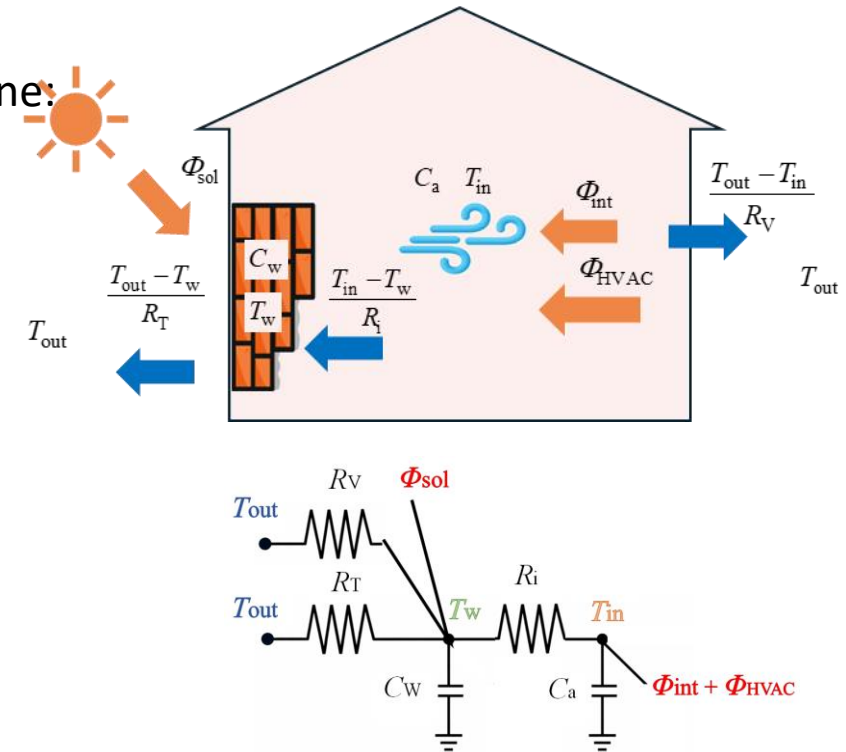
Bilans za unutrašnji vazduh:

$$C_a \frac{dT_{in}}{dt} = \frac{T_w - T_{in}}{R_i} + \frac{T_{out} - T_{in}}{R_v} + \Phi_{HVAC} + \Phi_{int}$$

Bilans za termički masu zida:

$$C_w \frac{dT_w}{dt} = \frac{T_{out} - T_w}{R_T} + \frac{T_{in} - T_w}{R_i} + \Phi_{sol}$$

**** U jednačini energetske bilansa za unutrašnji vazduh pojavljuje još jedan član kojim se obuhvata protok toplote ventilacijom.**



Slika 4. Šematski prikaz 3R-2C modela zgrade (gore) i odgovarajuća analogija sa električnim kolima (dole)

Klasifikacija modela za simulaciju ponašanja zgrada

MODELI SIVE KUTIJE (GREY-BOX)

3R–3C modeli

- Najčešće korišćenih grey-box modela za detaljniju dinamičku analizu zgrada i predstavlja dinamički sistem trećeg reda, što znači da ima tri karakteristične vremenske konstante.

- Energetski bilans za unutrašnji vazduh:

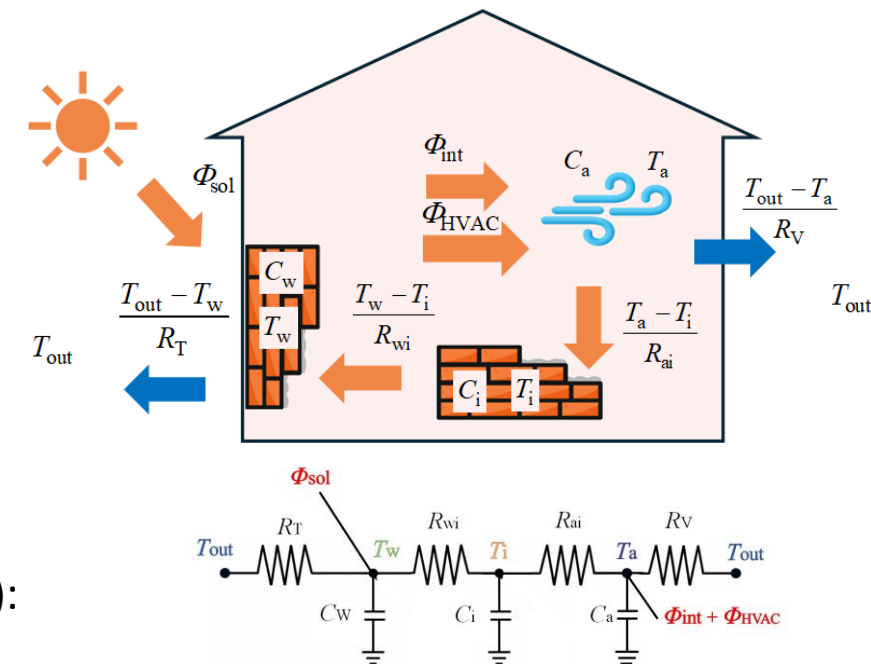
$$C_a \frac{dT_{in}}{dt} = \frac{T_i - T_{in}}{R_{ia}} + \Phi_{HVAC} + \Phi_{int} + \frac{T_{out} - T_{in}}{R_v}$$

- Energetski bilans elementa građevinskog omotača zgrade (zidovi, fasada):

$$C_w \frac{dT_w}{dt} = \frac{T_{out} - T_w}{R_T} + \frac{T_i - T_w}{R_{wi}} + \Phi_{sol}$$

- Energetski bilans unutrašnjih građevinskih elementa (podovi, unutrašnji zidovi):

$$C_i \frac{dT_i}{dt} = \frac{T_w - T_i}{R_{wi}} + \frac{T_a - T_i}{R_{ai}}$$



Slika 5. Šematski prikaz 3R-3C modela zgrade (gore) i odgovarajuća analogija sa električnim kolima (dole)

MODELI SIVE KUTIJE (GREY-BOX)

R-C modeli višeg reda

- Uvođenje RC modela višeg reda (3R–3C, 4C, 5C i složenijih struktura) proističe iz potrebe za preciznijim opisom dinamičkog termičkog ponašanja zgrada. Omogućavaju razdvajanje podova, unutrašnjih zidova i fasade, čime se preciznije modeluje dinamika sistema.
- Povećanje reda modela uvodi dodatne vrednosti, odnosno vremenske konstante, čime se omogućava:
 1. brža dinamika vazdušnog čvora,
 2. srednja dinamika unutrašnjih površina,
 3. spora dinamika konstrukcije mase.
- Ovo je naročito značajno kod analize hlađenja u toku noći, intermitentnog grejanja, solarnih dobitaka toplote i dinamičke interakcije sa niskotemperaturnim sistemima (4GDH / 5GDH), gde fazni pomak i akumulacija toplote imaju ključnu ulogu.
- Sa druge strane, povećanje reda modela dovodi do većeg broja parametara koje je potrebno identifikovati, što može otežati njihovo pouzdano određivanje.

MODELI BELE KUTIJE (WHITE-BOX)

- Modeli bele kutije zasnivaju se na detaljnom fizičkom opisu svih relevantnih procesa koji određuju ponašanje zgrade.
- Parametri modela bele kutije se u najvećoj meri određuju na osnovu projektne dokumentacije, tehničkih specifikacija i standardizovanih vrednosti.
- Modeli se često realizuju kroz specijalizovane softverske alate za simulaciju energetske performansi zgrada.
- Matematička formulacija zasniva se **na zakonu o očuvanju energije i detaljnom opisu prenošenja toplote** kroz svaki element zgrade. Prenos toplote kroz višeslojni zid opisuje se parcijalnim diferencijalnim jednačinama:

$$\frac{dU}{dt} = \sum \Phi_{in} - \sum \Phi_{out}$$

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T)$$

- **GLAVNI NEDOSTACI:** velika količina potrebnih ulaznih podataka, značajno vreme potrebno za izradu i kalibraciju modela, kao i ograničenu pogodnost za primenu u realnom vremenu.

- Modeli crne, sive i bele kutije razlikuju ne samo po nivou složenosti, već i po ulozi koju imaju u različitim fazama životnog ciklusa zgrade.
- **Modeli crne** kutije pokazali su se efikasnim u prediktivnim i analitičkim zadacima, ali sa ograničenom mogućnošću fizičke interpretacije. **Modeli bele** kutije ostaju nezamenljivi u projektovanju i normativnim proračunima, ali zahtevaju obimne ulazne podatke i značajne resurse. Između ova dva pristupa, **modeli sive kutije**, posebno RC modeli, predstavljaju optimalan kompromis između fizičke utemeljenosti i praktične primene.
- Istaknuta prednost RC modela u pogledu mogućnosti eksperimentalnog određivanja efektivnih termičkih parametara zgrade, čime se omogućava realističan opis stvarnog ponašanja postojećih objekata.
- **Budući razvoj modeliranja ponašanja zgradaneće ići ka zameni postojećih pristupa, već ka njihovoj integraciji. U tom kontekstu, RC modeli zauzimaju centralno mesto, odnosno vezu između teorijskih proračuna, merenja u realnim uslovima i operativnog upravljanja.**

HVALA NA PAŽNJI!

Thank you for your attention!

Ovde su prikazani rezultati istraživanja podržanog od strane Ministarstva nauke, tehnološkog razvoja i inovacija RS po Ugovoru 451-03-34/2026-03/200105, Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, od 05.02.2026 godine.

Kontakt podaci autora

prof. dr Miloš Banjac

Sandra Kovačević, istraživač pripravnik

Branislav Petrović, asistent

prof. dr Mirko Komatina

Univerzitet u Beogradu Mašinski fakultet

mbanjac@mas.bg.ac.rs

skovacevic@mas.bg.ac.rs

bpetrovic@mas.bg.ac.rs

mkomatina@mas.bg.ac.rs



ENERGY ENERGETIKA 2026

